Лекция 7
Основные теоремы дифференциального исчисления. Приложения производной.

Тлеулесова А.М.

1) Основные теоремы дифференциального исчисления (Теорема Ферма, Теорема Ролля,

формула конечных приращений Лагранжа, формула Коши).

2) Правила Лопиталя для отыскания пределов неопределенных выражений.

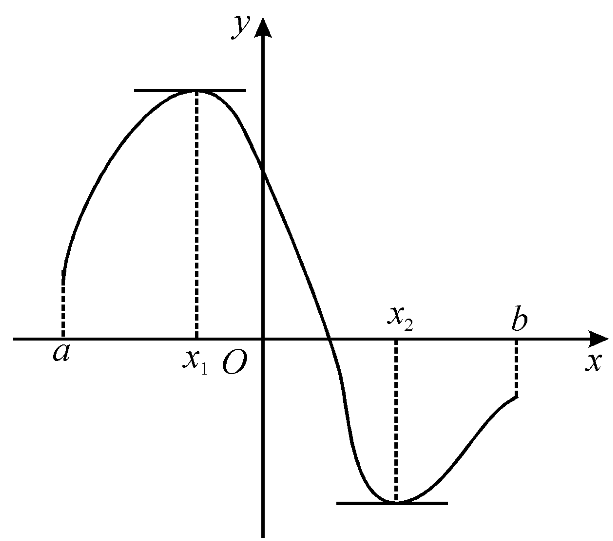
3) Формула Тейлора. Формула Маклорена. Разложение по формуле Маклорена некоторых

элементарных функции. Различные формы остаточного члена формулы Тейлора.

<u>Теорема Ферма</u>′ (*Пьер Ферма*). Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$, и в некоторой внутренней точке этого отрезка принимает свое наибольшее или наименьшее значение, тогда, если производная в этой точке $f'(x_0)$ существует, то она непременно = 0.

Геометрический смысл теоремы Ферма

Если внутренняя точка кривой наиболее или наименее удалена от оси *OX*, то касательная в этой точке, если она существует, параллельна оси *OX*, то есть, горизонтальна



Теорема Ролля. Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$, и удовлетворяет трем условиям:

1) $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$.

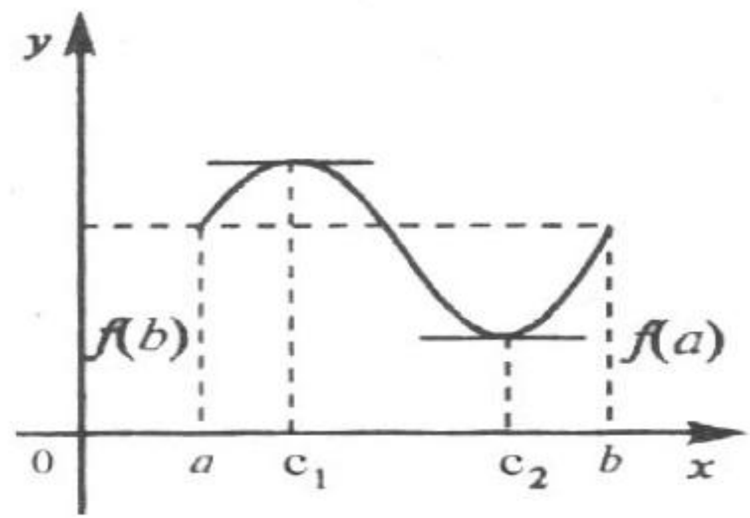
2) $f(x)$ дифференцируема на (a,b).

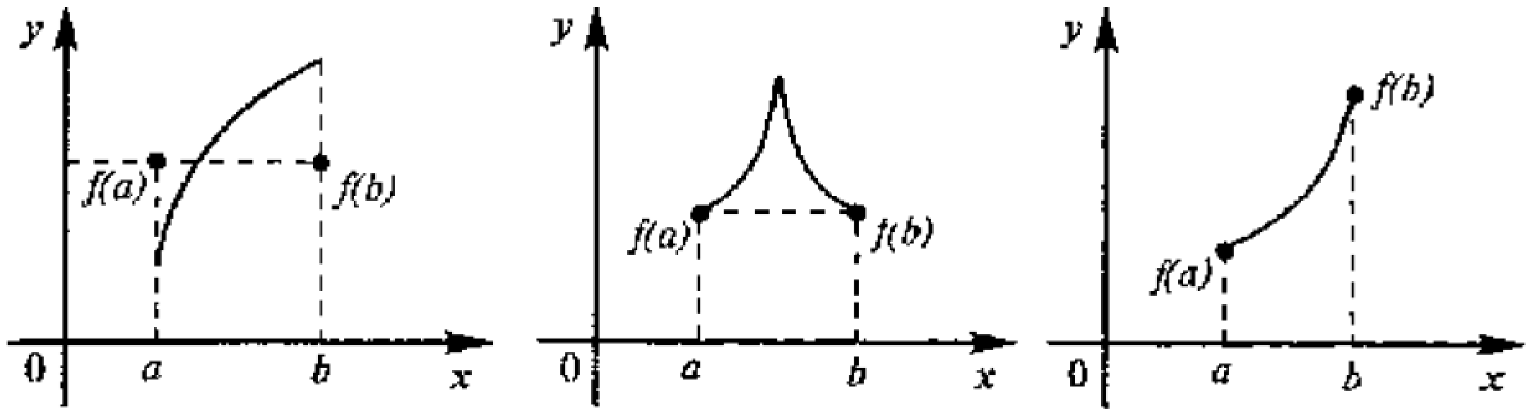
3) $f(a) = f(b)$.

Тогда внутри отрезка $[a,b]$ найдется хотя бы одна точка x_0, в которой $f'(x_0) = 0$.

Геометрический смысл теоремы Ролля:

Если концы гладкой кривой $y = f(x)$ имеют одинаковые ординаты, то на этой кривой найдется хотя бы одна точка, касательная в которой горизонтальна.





а) б) в)

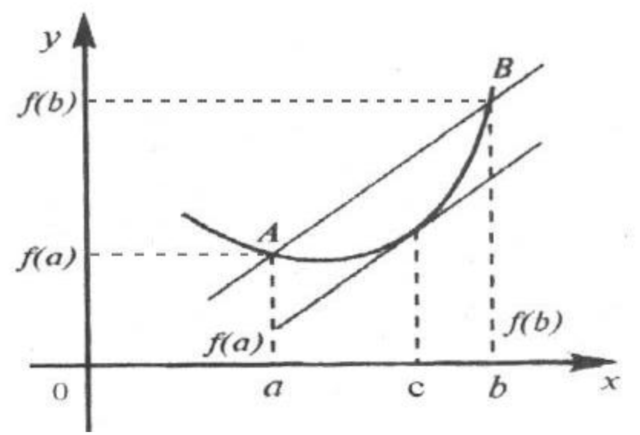
Теорема Лагранжа. Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$, и удовлетворяет двум условиям:

1) $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$.

2) $f(x)$ дифференцируема на (a,b).

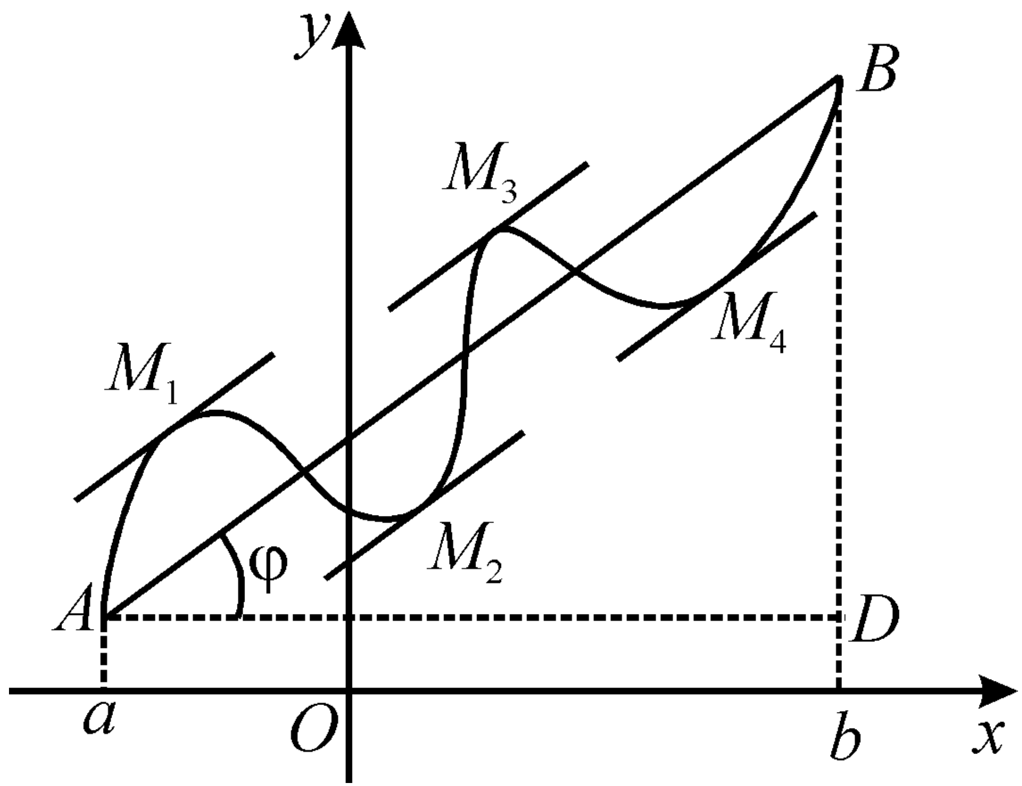
Тогда внутри отрезка $[a,b]$ найдется хотя бы одна точка x_0, в которой:

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a).$$



Геометрический смысл теоремы Лагранжа:

Если концы гладкой кривой $y = f(x)$ соединить хордой, то на этой кривой найдется хотя бы одна точка, в которой касательная параллельна этой хорде.



Теорема Коши. Пусть функция $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям:

1) $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на [a,b];

2) $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в (a,b);

3) $(f'(x))^2 + (g'(x))^2 \neq 0$, при $a < x < b$; $g(a) \neq g(b)$.

Тогда существует точка $c \in (a,b)$ такая, что справедлива формула Коши:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы в $\delta-$окрестности точки x_0 и $\varphi'(x) \neq 0$ при всех x из этой окрестности, тогда, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$$

или

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \infty,$$

т.е. частное $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ принимает в точке $x = x_0$ неопределенную форму $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$, то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

при условии, что существует предел отношения производных.

Если частное $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ в точке $x = x_0$ будет также неопределенностью вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$ и $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ удовлетворяют соответствующим условиям, то следует перейти к отношению вторых производных и т.д.

ПРИМЕР $\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{6}{9-x^2}-\dfrac{1}{x+3}\right)$.

Решение. В данном случае имеем неопределенность вида $\infty-\infty$. Приведя выражение в скобках к общему знаменателю, получим $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{6-3+x}{9-x^2}= \ =\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{9-x^2}$. В результате имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Применив правило Лопиталя, находим $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{9-x^2}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{1}{-2x}=\dfrac{1}{6}$.

Формула Тейлора. Пусть функция f(x) имеет в некоторой окрестности точки x_0 производные $f', f'', \dots f^{(n)}$.

Тогда для любой точки x из этой окрестности имеет место равенство:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o\big((x - x_0)^n\big) \text{ при } x \to x_0.$$

Если в ряде Тейлора положить $x_0 = 0$, то получим разложение функции по степеням x в так называемый ряд Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!}x^n$$

Разложение функций $f(x)=\sin x,\ \cos x$.

$$f(x)=\sin x, \quad f(0)=0,$$

$$f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right), \ \ f'(0)=1,$$

$$f''(x)=-\sin x=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right), \ \ f''(0)=0,$$

$$f'''(x)=-\cos x=\sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right), \ \ f'''(0)=-1,$$

$$f^{IV}(x)=\sin x=\sin\left(x+4\cdot\frac{\pi}{2}\right), \ \ f^{IV}(0)=0,$$

$$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ \ldots\ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots,$$

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right), \ \ f^{(n)}(0)=\sin\frac{\pi n}{2}=\begin{cases}0, \text{ при } \ n=2k,\\ (-1)^k, \text{ при } \ n=2k+1.\end{cases}$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}\cdot\cos\theta x.$$

Аналогичным образом получается разложение функции $f(x)=\cos x$:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cdot\cos\theta x.$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \qquad x \in (-\infty; \infty)$$

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \qquad x \in (-\infty; \infty)$$

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \qquad x \in (-\infty; \infty)$$

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots, \qquad x \in (-1; 1]$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots, \qquad x \in (-1; 1)$$